

*На правах рукописи*

Мелешенко Петр Александрович

**КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ В  
НАНОСТРУКТУРАХ**

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2011

Работа выполнена на кафедре физики Воронежского государственного аграрного университета им. К. Д. Глинки.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент Клиньских Александр Федотович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Кадменский Станислав Георгиевич

кандидат физико-математических наук, доцент Преображенский Михаил Артемьевич

Ведущая организация: Российский научный центр "Курчатовский институт", г. Москва

Защита диссертации состоится "17" февраля 2011 г. в 15<sup>10</sup> часов на заседании диссертационного совета Д 212.038.06 при Воронежском государственном университете по адресу: 394006, Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 428.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Воронежского государственного университета.

Автореферат разослан "15" января 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

Дрождин С.Н.

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы

В области современной наноэлектроники заслуживает особого внимания прогресс в экспериментальном получении, развитии и понимании основных свойств различных наноразмерных структур. При этом выделяются два основных направления: 1) технологии получения и теоретического описания квантовых каскадов (последовательностей одномерных потенциальных барьеров и ям), применяемых в квантовых каскадных лазерах (quantum cascade lasers, QCL); 2) квантовые интерференционные устройства, такие как квантовые кольца (quantum rings) и каскады квантовых колец, рассматриваемые как перспективные элементы современной оптоэлектроники, планарной оптики, спинтроники и т.д.

Появление лазеров на квантовых каскадах послужило толчком к развитию новых приложений, основанных на использовании электромагнитного излучения с терагерцовой частотой, поскольку именно на такой частоте происходит излучение электромагнитных волн в квантовых каскадах. Развитию теоретических основ работы лазеров на квантовых каскадах посвящено большое число работ. Современные теоретические подходы к расчету энергетической структуры активной зоны таких лазеров основаны на методе неравновесных функций Грина. В данной работе развивается теоретический подход к описанию каскадных систем, основанный на формализме теории рассеяния (метод трансфер-матрицы). Одним из основных преимуществ является общность постановки задачи рассеяния, связанная с тем, что данные рассеяния включают в себе практически полную информацию об исследуемой системе (как в дискретном, так и в непрерывном спектрах). Также в рамках данного подхода оказывается возможным учесть дисперсию эффективной массы в гетероструктуре. Таким образом, можно сделать вывод, что развитие теории, основанной на методе трансфер-матрицы, для анализа и моделирования таких физических систем, как квантовые каскады, гибридные магнито-электрические наноструктуры и квантовые интерференционные устройства является актуальной задачей.

Еще одной важной и интересной задачей является задача о постановке и проведении экспериментов по обнаружению влияния эффекта Ааронова-Бома на наблюдаемые характеристики наноструктур. Впервые такая возможность была указана в 1985 году Даттой (Datta). В связи с отмеченной выше актуальностью, в данной работе рассмотрены характеристики излу-

чения, сопровождающего процесс рассеяния в эффекте Ааронова-Бома.

## Цели работы

Основными целями данной диссертационной работы являются:

1. Развитие последовательной теоретической схемы расчета характеристик переноса носителей заряда в квазиодномерных наноструктурах (квантовые каскады, гибридные магнито-электрические наноструктуры, квантовые интерференционные устройства).
2. Построение удобного для численной реализации представления функции Грина электрона в квазиодномерной структуре в рамках аппарата функций Йоста задачи рассеяния и расчет характеристик отклика такой системы на внешнее электромагнитное поле.
3. Исследование влияния квантовых эффектов интерференции (в том числе и эффекта Ааронова-Бома) на наблюдаемые характеристики низкоразмерных систем. В частности, решение задачи об излучении, сопровождающем процесс рассеяния в эффекте Ааронова-Бома.

## Научная новизна работы

- Впервые дана последовательная теоретическая схема расчета характеристик переноса заряда в квазиодномерных каскадных системах (последовательности потенциальных барьеров и ям), в гибридных магнито-электрических наноразмерных устройствах, а также в квантовых интерференционных устройствах (квантовые кольца), основанная на формализме теории рассеяния (метод трансфер-матрицы).
- Предложена удобная для анализа и численной реализации процедура построения функции Грина электрона в присутствии рассеивающего потенциала в квазиодномерных каскадных системах, основанная на использовании аппарата функций Йоста задачи рассеяния.
- Впервые исследованы свойства "тормозного" излучения, сопровождающего процесс рассеяния в эффекте Ааронова-Бома. В частности, получены и проанализированы явные аналитические выражения для спектральной плотности мощности, а также угловых и поляризационных характеристик излучения.

## **Положения, выносимые на защиту**

1. Приложения метода трансфер-матрицы для расчета характеристик переноса заряда в наноразмерных структурах, таких как каскадные системы потенциальных барьеров и ям, гибридные магнито-электрические наноструктуры, а также интерференционные системы с квантовыми кольцами.
2. Построение и анализ аналитических свойств функции Грина в методе трансфер-матрицы.
3. Свойства "тормозного" излучения (спектральная плотность мощности, угловые и поляризационные характеристики) в условиях эффекта Ааронова-Бома.

## **Практическая значимость работы**

- Предложенная в настоящей работе альтернативная формулировка метода трансфер-матрицы позволяет эффективно проводить численное моделирование процессов переноса носителей заряда в квазиодномерных структурах, таких как каскадные системы потенциальных барьеров и ям различной формы (полупроводниковые сверхрешетки), гибридные магнито-электрические наноструктуры, а также квантовые интерференционные устройства в виде квантовых колец. В рамках формализма теории рассеяния удается исследовать как дискретный (уровни энергии и их ширины), так и непрерывный (вольтамперные характеристики) спектры таких структур, а также определять отклик такой системы на внешнее электромагнитное поле.
- Полученные в диссертации результаты по "тормозному" излучению в условиях эффекта Ааронова-Бома могут иметь практическое приложение при разработке устройств, обеспечивающих генерацию терагерцового электромагнитного излучения

## **Апробация результатов работы**

Основные результаты диссертации представлялись и докладывались на следующих конференциях и семинарах: Школе-семинаре "Черенковское излучение: новые применения, ФИАН и ВГУ" (Москва-Троицк, 2006), XII Conference on Phonon Scattering in Condensed Matter "Phonons-2007"

(Paris, France, 2007), XV Всероссийской межвузовской научно-технической конференции студентов и аспирантов "Микроэлектроника и информатика – 2008" (Зеленоград, 2008), XI Международной конференции "Физика диэлектриков" "Диэлектрики – 2008" (Санкт-Петербург, 2008), V Международной научно-технической школе-конференции "Молодые ученые – 2008" (Москва, 2008), VII Международной научно-технической конференции "Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения" "INTERMATIC – 2009" (Москва, 2009), XIII Conference on Phonon Scattering in Condensed Matter "Phonons-2010" (Taipei, Taiwan, 2010), International conference on Coherent and Nonlinear Optics (ICONO), Conference on Lasers, Applications and Technologies (LAT) "ICONO/LAT – 2010" (Kazan, Russia, 2010), XXII Международной конференции "Релаксационные явления в твердых телах" "RPS – 22" (Воронеж, 2010), Семинаре ИПХФ Российского научного центра "Курчатовский институт" (Москва, 2010 г.)

## **Публикации**

По материалам диссертации опубликовано 14 печатных работ в форме статей, тезисов докладов и патента. Из них 8 статей, 3 в журналах перечня ВАК и 1 патент.

## **Личный вклад автора**

Автором лично проведены аналитические и численные расчеты, представленные в диссертации. Совместно с соавторами проводились обсуждения и интерпретация основных результатов, формулировались выводы по тематике исследования, а также производилась подготовка публикаций в печать. Результаты, составляющие содержание положений, выносимых на защиту, получены автором лично.

## **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и приложения. Общий объем диссертации составляет 122 страницы машинописного текста, включая 20 рисунков, 1 таблицу, а также список цитируемой литературы из 151 наименования.

## Краткое содержание диссертации

Во **Введении** кратко рассматривается актуальность, а также очерчивается круг вопросов, рассматриваемых в диссертации, указываются ее цели и формулируются положения диссертации, выносимые на защиту.

В **главе 1** представлен литературный обзор по теме диссертационной работы. Обзор существующих теоретических и экспериментальных данных позволяет сделать вывод о необходимости развития теории, дающей возможность более эффективно моделировать процесс переноса заряда в рассматриваемых устройствах, а также рассмотреть ряд новых эффектов.

В **главе 2** развивается метод трансфер-матрицы [1–3], позволяющий эффективно моделировать динамику электрона в квантовом каскаде [4] (последовательности потенциальных барьеров и ям), описывать поведение носителей заряда в гибридной магнито-электрической наноструктуре [5], а также в разнообразных квантовых интерференционных устройствах [6].

В **разделе 2.1** рассматривается стандартная формулировка метода трансфер-матрицы, исследуются ее свойства, приводится формула, позволяющая определить сопротивление барьерной структуры через элементы трансфер-матрицы (формула Ландауэра (Landauer)), а также записаны явные выражения для трансфер матрицы прямоугольного потенциального барьера и дельта-потенциала.

В **разделе 2.2** приводится формулировка метода, основанная на использовании двух линейно независимых решений (в том числе и численных) уравнения Шредингера при построении трансфер-матрицы. В рамках данного подхода оказывается возможным получать выражения для коэффициентов отражения и прохождения через потенциалы с различной формой.

В области с отличным от нуля потенциалом ( $x \in [x_1, x_2]$ ) волновая функция электрона может быть представлена в виде суперпозиции двух линейно независимых решений уравнения Шредингера  $u$  и  $v$ :

$$\psi(x) = a u(x) + b v(x). \quad (1)$$

Амплитуда прохождения может быть получена из условия непрерывности логарифмической производной волновой функции в точках  $x_1$  и  $x_2$ :

$$t(k) = \frac{2i k (\nu_2 - \mu_2) \exp[-ik(x_2 - x_1)]}{\frac{u_1}{u_2}(\nu_2 - ik)(\mu_1 + ik) - \frac{v_1}{v_2}(\nu_1 - ik)(\mu_2 + ik)} \quad (2)$$

где  $u_{1,2} = u(x_{1,2})$ ,  $v_{1,2} = v(x_{1,2})$ ,  $\mu_{1,2} = u'(x)/u(x)|_{x=x_{1,2}}$ ,  $\nu_{1,2} = v'(x)/v(x)|_{x=x_{1,2}}$ .

В качестве иллюстрации предложенной техники в **разделе 2.2.1** рассмотрены случаи прямоугольного потенциального барьера (показано, что в этом случае результаты альтернативной формулировки совпадают с результатами, получаемыми в рамках стандартной формулировки), скошенной потенциальной ямы (ямы, глубина которой меняется по линейному закону), а также параболической ямы (ямы, глубина которой меняется по квадратичному закону). Для всех трех случаев приведены численные результаты для коэффициентов прохождения и отражения.

В **разделе 2.3** рассматриваются и анализируются фундаментальные решения задачи рассеяния (так называемые функции Йоста), с использованием которых возможно получить удобное выражение для одноэлектронной функции Грина и плотности состояний. В частности, с использованием альтернативной формулировки метода трансфер-матрицы, приводится выражение для функций Йоста одномерной задачи рассеяния на потенциале с произвольной формой.

В **разделе 2.4** приведена формула, связывающая одноэлектронную функцию Грина и функции Йоста.

$$G^+ \left( x, x', E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{f_1(k, x_>) f_2(k, x_<)}{W[f_1, f_2]}, \quad (3)$$

где  $x_> = \max[x, x']$ ,  $x_< = \min[x, x']$ ,  $W[f_1, f_2]$  – вронскиан решений Йоста. Можно показать, что представленная таким образом функция Грина при  $x \rightarrow \pm\infty$  имеет асимптотику расходящейся волны [7].

Из анализа вида функции Грина можно получить трансцендентное уравнение на значения волнового вектора, определяющего энергии связанных состояний:

$$u_1 v_2 (\mu_1 + ik)(\nu_2 - ik) - u_2 v_1 (\mu_2 - ik)(\nu_1 + ik) = 0, \quad (4)$$

которое должно решаться с заменой  $k = ik$ . Также в данном разделе получено выражение для функции Грина в асимптотических областях, а также выражение для одноэлектронной плотности состояний.

В **разделе 2.5** с помощью построенной функции Грина рассматривается такая важная характеристика квантовой системы, как обобщенная восприимчивость, определяющую динамику отклика квантовой системы на внешнее воздействие (например электромагнитное поле). В частности, представлены численные результаты зависимости от частоты внешнего электромагнитного поля обобщенной восприимчивости основного состояния электрона в квантовой яме в условиях размерного эффекта Штарка.



В **главе 3** представлены результаты применения метода трансфер-матрицы для описания динамики носителей заряда в различных наноразмерных структурах. В частности в гибридной магнито-электрической наноструктуре и в различных квантовых интерференционных устройствах (квантовые кольца и "квантовые графы").

В **разделе 3.1** рассмотрена модель гибридной магнито-электрической наноструктуры, основанная на применении метода трансфер-матрицы, а также получены аналитические выражения для коэффициента прохождения и сопротивления такой структуры в рамках подхода Ландауэра:

$$R = \frac{\pi \hbar}{e^2} \left[ \cos^2(qa) + \left( \frac{k_\varepsilon^2 + q^2 + 4k_\sigma^2}{2k_\varepsilon q} \right)^2 \sin^2(qa) \right]. \quad (5)$$

Обозначения, входящие в эту формулу, представлены в тексте диссертации. Результаты численного моделирования (вольт-амперная характеристика и зависимость сопротивления от напряженности магнитного поля) приведены на рисунке 1 (параметры моделирования см. в тексте диссертации).

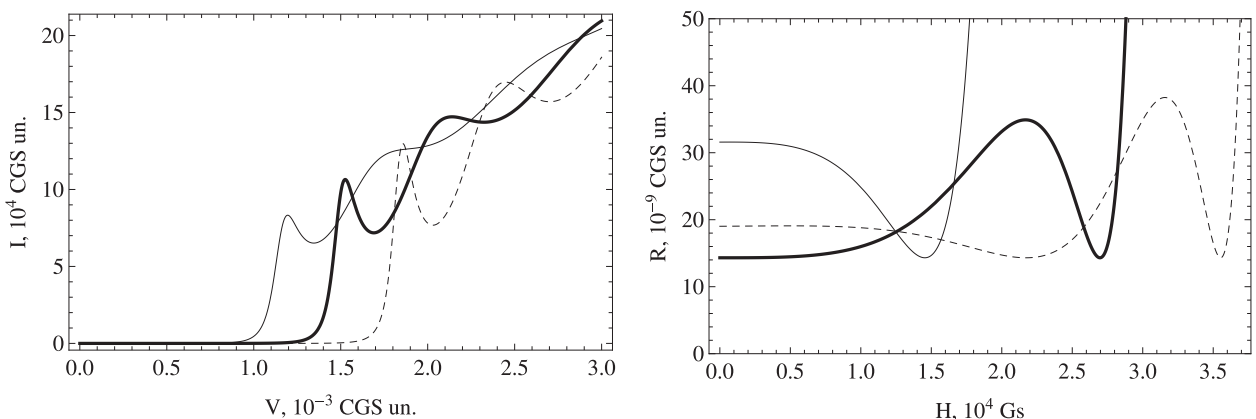


Рис. 1: Вольт-амперная характеристика гибридной магнито-электрической наноструктуры (левая картинка) при различных значениях высоты электростатического барьера и зависимость сопротивления такой структуры от величины напряженности магнитного поля (правая картинка) при различных значениях энергии электрона. Левая картинка: тонкая линия –  $U_0 = 0.3$  eV, жирная линия –  $U_0 = 0.4$  eV, штрихованная линия –  $U_0 = 0.5$  eV. Правая картинка: тонкая линия –  $E = 0.35$  eV, жирная линия –  $E = 0.4$  eV, штрихованная линия –  $E = 0.45$  eV.

В **разделе 3.2** рассмотрен процесс рассеяния в графо-подобных наноструктурах (так называемые "квантовые графы"), предложена удобная для численной реализации математическая модель (**раздел 3.2.1**), а также развит метод "массива вершин", позволяющий эффективно проводить моделирование процесса рассеяния в "квантовом графе" любой сложности (**раздел 3.2.2**). Ввиду громоздкости основных формул в данном автореферате мы их не приводим, отсылая к тексту диссертации. Здесь же

ограничимся только результатами **разделов 3.3** и **3.4**, где приведены явные аналитические выражения амплитуд прохождения и отражения для простейших "квантовых графов" – квантовых колец с разнообразной геометрией (см. рисунок 2).

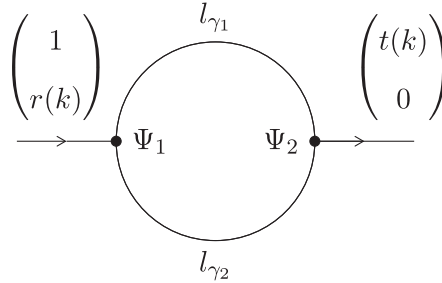


Рис. 2: Схематическое представление рассеяния на квантовом кольце.

В случае квантового кольца с равными длинами плеч ( $l_{\gamma_1} = l_{\gamma_2} = l$ ) выражения для амплитуд прохождения и отражения, полученные с помощью метода "массива вершин", имеют вид:

$$t(k) = \frac{4i}{5 \sin(kl) + 4i \cos(kl)}, \quad (6)$$

$$r(k) = -\frac{3}{5 + 4i \operatorname{ctg}(kl)}. \quad (7)$$

Энергетический спектр квантового кольца с равными плечами может быть получен из (6), (7) как значения волнового вектора  $k$ , определяющего энергию электрона, соответствующие нулям амплитуды отражения. Легко может быть найдено, что значения  $k_n = \pi n/l$ ,  $n = 1, 2, \dots$  удовлетворяют этому условию (мы получаем хорошо известный спектр квантового ротатора). Физически данный факт означает, что на квантовом кольце укладывается целое число длин волн де Бройля.

В случае квантового кольца с различными длинами плеч ( $l_{\gamma_1} \neq l_{\gamma_2}$ ) выражения для амплитуд прохождения и отражения соответственно имеют вид:

$$t(k) = i \frac{\sin kl_{\gamma_1} + \sin kl_{\gamma_2}}{3/2 \sin kl_{\gamma_1} \sin kl_{\gamma_2} + i \sin(kl_{\gamma_1} + kl_{\gamma_2}) - \cos kl_{\gamma_1} \cos kl_{\gamma_2} + 1}, \quad (8)$$

$$r(k) = \frac{\sin kl_{\gamma_1} \sin kl_{\gamma_2} + i \sin(kl_{\gamma_1} + kl_{\gamma_2})}{3/2 \sin kl_{\gamma_1} \sin kl_{\gamma_2} + i \sin(kl_{\gamma_1} + kl_{\gamma_2}) - \cos kl_{\gamma_1} \cos kl_{\gamma_2} + 1} - 1, \quad (9)$$

Как следует из (8)  $t(k)$  обращается в нуль, в следующих двух случаях:

$$kl_{\gamma_2} + kl_{\gamma_1} = 2\pi n, \quad n = 1, 2 \dots, \quad (10)$$

$$kl_{\gamma_2} - kl_{\gamma_1} = (2n + 1)\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (11)$$

Далее, на основании формул (10) и (11) проводится анализ резонансного поведения амплитуды прохождения (в данном случае под резонансным поведением амплитуды прохождения подразумевается ее обращение в нуль), классифицируются типы резонансов, в частности, введено два типа резонансов ("энергетические", отвечающие (10)) и "геометрические", отвечающие (11)). В литературе принято отождествлять такие резонансы с наличием связанных состояний в непрерывном спектре (так называемые *BICs*), однако никаких физически строгих оснований для этого не существует, поскольку не выполняются основные требования теоремы Вигнера-фон Неймана о специальном виде потенциала и квадратичной интегрируемости волновых функций, соответствующих задаче рассеяния на таком потенциале. Тем более, в представленных случаях какие-либо потенциалы вообще отсутствуют.

В **разделе 3.5** рассматривается случай, когда в центр кольца помещен магнитный поток (Aharonov-Bohm flux). Получены аналитические выражения для амплитуд прохождения и отражения, а также получены условия, при которых зависимость амплитуды прохождения имеет резонансный характер. Показано, что присутствие потока Ааронова-Бома приводит к изменению типа резонансов, или к возникновению новых резонансов (резонансы могут возникать даже в том случае, когда длины плеч квантового кольца соизмеримы). В **разделе 3.5.1**, с использованием метода трансформатрицы, приведены результаты численного моделирования процесса переноса заряда в каскаде квантовых колец.

**Глава 4** посвящена эффекту Ааронова-Бома (теоретические аспекты см. [8,9], эксперименты – [10,11]) – одному из самых известных интерференционных эффектов в квантовой механике.

В **разделе 4.1** кратко рассматривается интерференционный аспект эффекта Ааронова-Бома, а также дано необходимое условие его наблюдения.

В **разделе 4.2** эффект Ааронова-Бома обсуждается с точки зрения квантовой теории рассеяния. Приводится точное решения задачи рассеяния [9]

$$\langle r, \theta | \psi_\alpha \rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}|m - \alpha|\right) J_{|m-\alpha|}(kr) e^{im\theta}, \quad (12)$$

записано асимптотическое поведение точной волновой функции и выражение для дифференциального сечения рассеяния, найденное впервые в оригинальной статье [8]:

$$\frac{d\sigma^{AB}}{d\theta} = \frac{\sin^2(\pi\alpha)}{2\pi k} \frac{1}{\cos^2(\theta/2)}.$$

Здесь  $\alpha = \Phi/\Phi_0 = e\Phi/2\pi\hbar c$ ,  $\Phi$  – магнитный поток,  $\Phi_0$  – квант магнитного потока.

В **разделе 4.3** рассмотрен вопрос о калибровке векторного потенциала бесконечно тонкого соленоида и показано, что его присутствие соответствует сингулярному калибровочному преобразованию. Рассмотрен также вопрос об однозначности калибровочной функции и на простом примере продемонстрировано, что использование неоднозначной калибровочной функции приводит к сингулярному виду силовой характеристики электромагнитного поля (напряженность магнитного поля пропорциональна дельта-функции Дирака). В этом же разделе получено уравнение Шредингера задачи Ааронова-Бома, которое содержит сингулярное слагаемое связанное с присутствием бесконечно тонкого соленоида в начале координат.

**Раздел 4.4** посвящен проблеме излучения, сопровождающего процесс рассеяния электрона в эффекте Ааронова-Бома. В **4.4.1** с помощью "золотого" правила Ферми найдено замкнутое аналитическое выражение для спектральной плотности мощности излучения в элемент телесного угла и проанализировано ее поведение в зависимости от величины магнитного потока в соленоиде. Указана физическая причина возникновения такого излучения и обсуждается его связь с другими видами излучения.

Вероятность перехода в единицу времени может быть записана с помощью "золотого" правила Ферми:

$$dW_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle f | \hat{V}_{int} | i \rangle \right|^2 d\rho_f. \quad (13)$$

Здесь

$$\hat{V}_{int} = -\frac{q}{\mu c} \hat{A}_{rad,vac} \cdot \hat{p}$$

и

$$d\rho_f = \delta(E_f - E_i) \frac{S d^2 k_f V d^3 k}{(2\pi)^2 (2\pi)^3} \quad (14)$$

есть оператор взаимодействия и плотность конечных состояний электрона соответственно (вычисление матричного элемента, входящего в (13) приведено в **Приложении**).

Выражение для векторного потенциал вакуума выбирается в стандартной форме во вторично квантованном виде в дипольном приближении:

$$\hat{\vec{A}}_{rad,vac} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega}} \left( \vec{e}_{\vec{k}\sigma}^* \hat{a}^+ + \vec{e}_{\vec{k}\sigma} \hat{a} \right), \quad (15)$$

где  $\vec{e}_{\vec{k}\sigma}$  – поляризация фотона с волновым вектором  $\vec{k}$ ,  $\hat{a}^+$  и  $\hat{a}$  – операторы рождения и уничтожения фотона с волновым вектором  $\vec{k}$  и поляризацией  $\sigma$  соответственно,  $V$  – нормировочный объем,  $c$  – скорость света.

Волновые функции начального и конечного состояний электрона удовлетворяют уравнению [9]:

$$\frac{\left( \hat{p} - \frac{q}{c} \vec{A}_{A-B} \right)^2}{2\mu} |\psi_{i,f}^{+,-}\rangle = \varepsilon_{i,f} |\psi_{i,f}^{+,-}\rangle, \quad (16)$$

где

$$\vec{A}_{A-B} = \frac{\Phi}{2\pi r} \vec{e}_\varphi,$$

$\Phi$  – магнитный поток, который несет соленоид (поток Ааронова-Бома),  $\vec{e}_\varphi$  аксиальный орт полярной системы координат  $r, \varphi$ .

В соответствии с идеологией Зоммерфельда (см. например [1]) начальное и конечное состояние системы "электрон + фотон" могут быть представлены как:

$$|i\rangle = |0\rangle |\psi_i^+\rangle, |f\rangle = |1\rangle |\psi_f^-\rangle.$$

Здесь  $\psi_i^+$  (в асимптотике – сферически расходящаяся волна) и  $\psi_f^-$  (в асимптотике – сферически сходящаяся волна) есть точные решения задачи Ааронова-Бома и их явное аналитическое выражение имеет вид [8]:

$$|\psi_i^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{S}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^{|m+\alpha|} J_{|m+\alpha|}(k_i r) e^{im\varphi}, \quad (17)$$

$$|\psi_f^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{S}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (i)^{|n+\alpha|} J_{|n+\alpha|}(k_f r) e^{-in(\varphi+\pi)}, \quad (18)$$

где

$$\alpha = - \left[ \frac{q\Phi}{2\pi\hbar c} \right] = \left[ \frac{\Phi}{\Phi_0} \right],$$

$\Phi_0$  – квант магнитного потока,  $S$  нормировочная площадь в двумерном случае. Отметим, что значения параметра  $\alpha$  могут быть сведены к интервалу

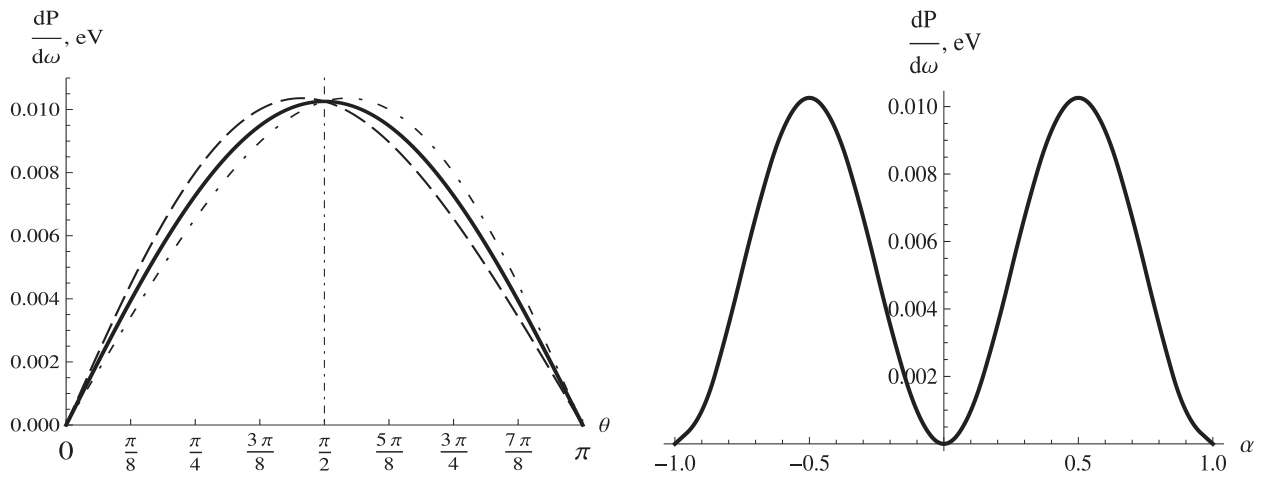


Рис. 3: Левая картинка: угловая зависимость мощности излучения (жирная линия – линейная поляризация, штрих-пунктирная линия – правая поляризация, штрихованная линия – левая поляризация; во всех случаях  $\alpha = 0.5$ ). Правая картинка: зависимость мощности излучения от магнитного потока (в единицах кванта магнитного потока  $\Phi_0$ ) в случаях циркулярной и линейной поляризации излученного фотона (направление вылета фотона задается углом  $\theta = \pi/2$ ). Энергия электрона –  $50eV$ , частота фотона –  $\omega = 10^{12}s^{-1}$

$[0, 1]$  (см. [9]), поэтому используется стандартное обозначение для дробной части числа, именно  $\alpha = [\Phi/\Phi_0]$ . Ввиду громоздкости аналитических выражений для спектральной плотности мощности излучения здесь они не приводятся (см. текст диссертации). Физическая причина излучения в условиях эффекта Ааронова-Бома заключается в следующем: собственное поле движущегося электрона дифрагирует на соленоиде, вследствие чего возникает интерференция такого дифрагированного поля и собственного поля рассеянного электрона. Результат такой интерференции на больших расстояниях от рассеивающей системы может быть отождествлен с излучением (дифрагируя, собственное поле электрона "отрывается" от него, что и можно отождествить с излучением). На рисунке представлены угловое (по полярному углу) распределение (левая картинка) и зависимость спектральной плотности мощности излучения от величины потока Ааронова-Бома.

В 4.4.1 проанализирована поляризационная структура излучения а в 4.4.2 представлено более детальное обсуждение результатов численного моделирования процесса излучения. В частности, представлены зависимости спектральной плотности мощности излучения от магнитного потока в соленоиде, угловые распределения излучения при различных параметрах налетающего электрона (энергия) и излученного фотона (поляризация), а также представлена зависимость степени циркулярного дихроизма от потока Ааронова-Бома.

В разделе 4.5 на примере квантового кольца, в рамках модели двумерного ротатора, рассматривается влияние эффекта Ааронова-Бома на наблюдаемые характеристики такой системы. Найдено решение уравнения Шредингера и получен спектр квантового кольца с потоком Ааронова-Бома, помещенного во внешнее однородное магнитное поле. В 4.5.1 получены и проанализированы выражения для статсуммы, свободной энергии, энтропии, намагниченности и магнитной восприимчивости такой системы. Показано, что наличие потока Ааронова-Бома приводит к осцилляционной зависимости наблюдаемых характеристик от его величины. В частности, для свободной энергии получено следующее выражение

$$\mathcal{F}(\chi, \alpha, \xi) = -\varepsilon\chi \ln \left\{ \sqrt{\pi\chi} \vartheta_3 \left[ \pi(\xi + \alpha), e^{-\pi^2\chi} \right] \right\}, \quad (19)$$

где  $\vartheta_3(u, q)$  – эллиптическая тэта-функция третьего рода,

$$\alpha = \frac{e \Phi_{AB}}{2\pi\hbar c} = \frac{\Phi_{AB}}{\Phi_0}, \quad \varepsilon = \frac{\hbar^2}{2mR^2},$$

$$\xi = \frac{e \Phi_H}{2\pi\hbar c} = \frac{\Phi_H}{\Phi_0} = \frac{1}{2\varepsilon} \mu_B H,$$

$\chi = (\beta\varepsilon)^{-1}$ ,  $\beta = (k_B T)^{-1}$ ,  $R$  – радиус квантового кольца,  $\Phi_{AB}$  – поток Ааронова-Бома,  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $\mu_B$  – магнетон Бора. Для

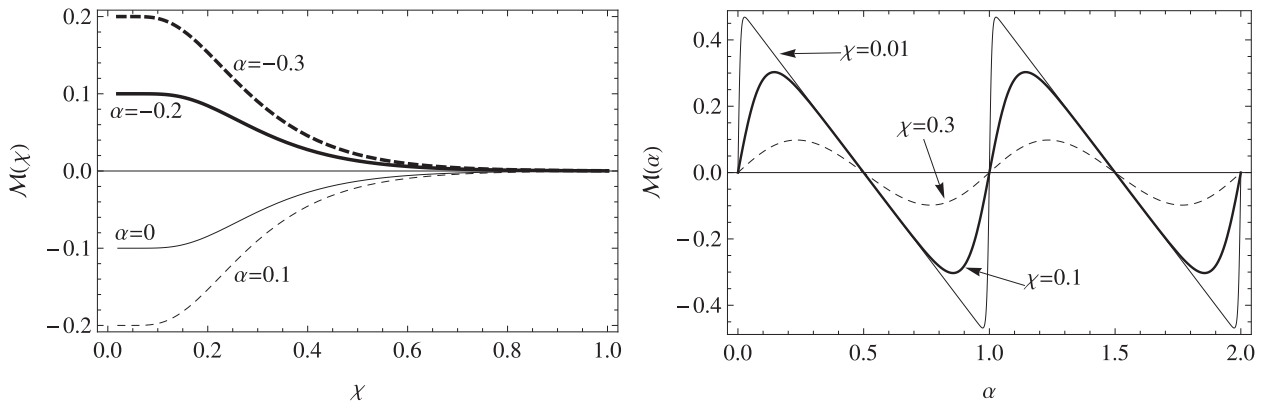


Рис. 4: Левая картинка: зависимость намагниченности квантового кольца  $\mathcal{M}$  (в единицах магнетона Бора) от температуры  $\chi$  при различных значениях потока Ааронова-Бома  $\alpha$  (однородное магнитное поле  $\xi = 0.1$ ). Правая картинка: зависимость намагниченности квантового кольца  $\mathcal{M}$  (в единицах магнетона Бора) от величины потока Ааронова-Бома  $\alpha$  при различных значениях температуры  $\chi$  (однородное магнитное поле  $\xi = 0.5$ ).

намагниченности получено следующее выражение:

$$\mathcal{M}(\chi, \alpha, \xi) = \mu_B \pi \chi \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\sin[2\pi j(\xi + \alpha)]}{\text{sh}(\pi^2 j \chi)}. \quad (20)$$

Следует отметить, что входящий в (20) ряд является быстро сходящимся и процесс численного расчета не вызывает никаких затруднений (аналогично и в случае магнитной восприимчивости).

Результаты численного моделирования приведены на рисунке 4. Выражение для магнитной восприимчивости имеет вид:

$$\gamma_H(\chi, \alpha, \xi) = \frac{\pi^2 \mu_B^2}{\varepsilon} \chi \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{j \cos[2\pi j(\xi + \alpha)]}{\text{sh}(\pi^2 j \chi)}. \quad (21)$$

На рисунке 5 представлены численные значения магнитной восприимчи-

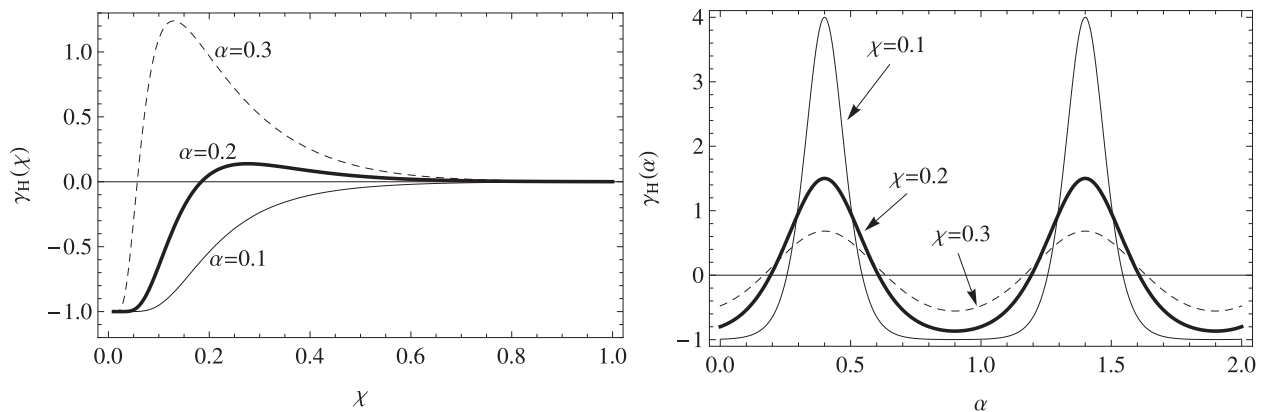


Рис. 5: Левая картинка: зависимость магнитной восприимчивости  $\gamma_H$  (в единицах  $\mu_B^2/\varepsilon$ ) от температуры  $\chi$  при различных значениях потока Ааронова-Бома  $\alpha$  (однородное магнитное поле  $\xi = 0.1$ ). Правая картинка: зависимость магнитной восприимчивости  $\gamma_H$  (в единицах  $\mu_B^2/\varepsilon$ ) от величины потока Ааронова-Бома  $\alpha$  при различных значениях температуры  $\chi$  (однородное магнитное поле  $\xi = 0.1$ ).

вости как функции температуры и потока Ааронова-Бома.

В **Заключении** сформулированы основные результаты, полученные в диссертации:

1. Предложена формулировка метода трансфер-матрицы, основанная на использовании двух линейно независимых решений уравнения Шредингера в области с отличным от нуля потенциалом. В рамках развиваемого формализма проанализирована модель гибридной магнито-электрической наноструктуры и найдены основные характеристики такой структуры, качественно правильно описывающие динамику переноса носителей заряда.
2. В рамках метода трансфер-матрицы построены фундаментальные решения задачи рассеяния (решения Йоста) и проанализированы их общие свойства. Построена одночастичная функция Грина задачи рас-



сеяния и получены аналитические выражения для ее асимптотического поведения. Представлены результаты численного расчета обобщенной восприимчивости основного состояния электрона в условиях размерного эффекта Штарка, качественно правильно отражающие зависимость восприимчивости от формы потенциала.

3. Развита метод, позволяющий эффективно моделировать процесс переноса носителей заряда в квантовых интерференционных устройствах. Проанализированы простейшие квантовые интерференционные устройства (квантовые кольца, в том числе и в присутствии потока Ааронова-Бома) и найдены явные аналитические выражения для амплитуд отражения и прохождения через такие структуры. Проанализировано резонансное поведение амплитуд прохождения и отражения в случае квантовых колец с различными геометрическими параметрами.
4. В рамках теории возмущений в непрерывном спектре получены аналитические выражения для спектральной плотности мощности излучения, сопровождающего процесс рассеяния электрона в эффекте Ааронова-Бома. Проанализирована зависимость спектральной плотности мощности излучения от магнитного потока, а также его угловые и поляризационные характеристики. В рамках модели двумерного ротатора исследовано влияние эффекта Ааронова-Бома на наблюдаемые характеристики квантового кольца. Найдены и проанализированы точные выражения для свободной энергии, энтропии, намагниченности и магнитной восприимчивости квантового кольца с потоком Ааронова-Бома, помещенного во внешнее однородное магнитное поле.

### **Список основных публикаций по материалам диссертации**

1. Tunneling properties of hybrid magnetoelectric nanoscale devices / A. F. Klinskikh, P. A. Meleshenko, A. V. Dolgikh, D. A. Chechin // *Eur. Phys. J. B.* — 2010. — Vol. 78, no. 4. — Pp. 469–474.
2. Функция Грина каскада квантовых ям / А. В. Долгих, П. А. Мелешенко, А. В. Колупанова, А. Ф. Клиньских // *Вестник ВГУ, Серия: Физика. Математика.* — 2009. — № 1. — С. 37–41.

3. Radiative attenuation of the electron in the Aharonov-Bohm effect / A. F. Klinskikh, P. A. Meleshenko, A. V. Dolgikh, H. T. T. Nguyen // *Nuovo Ciment. B.* — 2010. — Vol. 125, no. 10. — Pp. 1161–1171.

4. Пат. 2381603 РФ, МПК Н 01 S 7/16. Способ генерации в вакууме электромагнитного излучения в терагерцовом диапазоне / Клинских А. Ф., Мелешенко П. А. — № 2381603; Заяв. 2008123502/28 (09.06.2008); Оpubл. 10.02.2010. — Бюл. № 4.

5. Мелешенко, П. А. Восприимчивость электрона в квантовом кольце в условиях эффекта Ааронова-Бома / П. А. Мелешенко, А. В. Долгих, А. Ф. Клинских // Материалы V Международной научно-технической школы-конференции "Молодые ученые – 2008", Москва, 10–13 ноября, 2008. — ч. 1. — С. 31–35.

6. К теории гибридных магнитно-электрических квантовых наноструктур / П. А. Мелешенко, И. С. Барбаров, Д. А. Чечин, А. Ф. Клинских // Материалы VII Международной научно-технической конференции "INTERMATIC – 2009", Москва, 7–11 декабря, 2009. — ч. 1. — С. 24–28.

7. Квантовые интерференционные устройства с кольцеобразной геометрией / П. А. Мелешенко, А. В. Долгих, Ханг Нгуен, А. Ф. Клинских // Материалы VII Международной научно-технической конференции "INTERMATIC – 2009", Москва, 7–11 декабря, 2009. — ч. 3. — С. 20–23.

8. Намагниченность квантового кольца в присутствии потока Ааронова-Бома / П. А. Мелешенко, Ханг Т. Т. Нгуен, А. В. Долгих, А. Ф. Клинских // Материалы VIII Международной научно-технической конференции "INTERMATIC – 2010", Москва, 23–27 ноября, 2010. — ч. 1. — С. 24–28.

Работы 1 — 3 опубликованы в журналах, рекомендованных перечнем ВАК РФ.

## Список цитируемой литературы

[1] Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: учебное пособие для вузов в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — 4-е, испр. изд. — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. — Т. III. Квантовая механика (нерелятивистская теория). — 768 с.

- [2] *Merzbacher, E.* Quantum mechanics / E. Merzbacher. — 2nd. edition. — New York: Wiley, 1970. — 635 pp.
- [3] *Imry, Y.* Conductance viewed as transmission / Y. Imry, R. Landauer // *Rev. Mod. Phys.* — 1999. — Vol. 71. — Pp. S306–S312.
- [4] Spectroscopy of GaAs/AlGaAs quantum-cascade lasers using hydrostatic pressure / S. R. Jin, C. N. Ahmad, S. J. Sweeney et al. // *Appl. Phys. Lett.* — 2006. — Vol. 89, no. 22. — Pp. 221105.
- [5] Large tunneling magnetoresistance in a field-effect transistor with a nanoscale ferromagnetic gate / J.-U. Bae, T.-Y. Lin, Y. Yoon et al. // *Appl. Phys. Lett.* — 2008. — Vol. 92. — Pp. 253101.
- [6] Energy spectra of quantum rings / A. Fuhrer, S. Lüscher, T. Ihn et al. // *Nature* — 2001. — Vol. 413. — Pp. 822–825.
- [7] *Базь, А. И.* Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике / А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов. — 2-е, испр. и доп. изд. — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1971. — 544 с.
- [8] *Aharonov, Y.* Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory / Y. Aharonov, D. Bohm // *Phys. Rev.* — 1959. — Vol. 115. — Pp. 485–491.
- [9] *Olariu, S.* The quantum effects of electromagnetic fluxes / S. Olariu, I. I. Popescu // *Rev. Mod. Phys.* — 1985. — Vol. 57. — Pp. 339–436.
- [10] *Peshkin, M.* The Aharonov-Bohm effect / M. Peshkin, A. Tonomura. — Springer-Verlag, Berlin, 1989. — 152 pp.
- [11] *Caprez, A.* Macroscopic test of the Aharonov-Bohm effect / A. Caprez, B. Barwick, H. Batelaan // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 99, no. 21. — Pp. 210401.